

Proposition: Soit $K \subset \mathbb{L}$ des corps et $a \in \mathbb{L}$.

Alors a est algébrique sur K si $K[a]$ est un corps et $\dim_K K[a] = [K[a]:K] < +\infty$.

$\Rightarrow$: Considérons $\varphi_a: K[X] \rightarrow \mathbb{L}$, $P \mapsto P(a)$. C'est un morphisme d'anneaux et $\text{Im } \varphi_a = K[a]$. pas nécessaire
on utilise seulement sa
structure de K -ev

Puisque a est algébrique sur K , il existe $\pi_a \in K[X]$ unitaire et irréductible sur K tel que

$\text{Ker } \varphi_a = (\pi_a)$ puisque $K[X]$ est principal.

Par le 1^{er} théorème d'isomorphisme, $K[a] \cong \frac{K[X]}{(\pi_a)}$ qui est un corps car π_a est irréductible.

De plus, $\dim_K K[a] = \deg \pi_a < +\infty$.

$\Leftarrow$: Notons $n = \dim_K K[a] < +\infty$. Alors, la famille $(1, a, \dots, a^n)$ est liée. Donc il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i a^i = 0$. D'où $P(a) = 0$ où $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i X^i \in K[X]$ i.e. a est algébrique sur K .

Théorème: Notons A l'ensemble des nombres algébriques sur K .

Alors A est un corps.

• Soit $x, y \in A$. Alors $K[x] = K(x)$ et $K[y] = K(y)$. De plus, $K[x-y] \subset K(x, y) = K(x)(y) = K(x)[y]$.

Or, $[K(x):K] < +\infty$ et $[K(x)(y):K(x)] < +\infty$ donc par le théorème de la base télescopique,

$[K(x)(y):K] = [K(x)(y):K(x)][K(x):K] < +\infty$. D'où $[K[x-y]:K] \leq [K(x)(y):K] < +\infty$ et $x-y \in A$.

• Si $y \neq 0$, $K[xy^{-1}] \subset K(xy^{-1}) \subset K(x, y)$ et $[K(x, y):K] < +\infty$. Donc $[K[xy^{-1}]:K] < +\infty$ i.e. $xy^{-1} \in A$.

Théorème: Supposons de plus que $\mathbb{L}$ est algébriquement clos.

Alors A est algébriquement clos.

Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X] \setminus \{0\} \subset \mathbb{L}(X) \setminus \{0\}$. Puisque $\mathbb{L}$ est algébriquement clos, il existe $a \in \mathbb{L}$ tel que

$P(a) = 0$ i.e. a est algébrique sur $K(a_0, \dots, a_n)$.

D'où $K(a_0, \dots, a_n)(a)$ est un corps égal à $K(a_0, \dots, a_n)(a) = K(a_0, \dots, a_n, a)$ et $[K(a_0, \dots, a_n, a):K(a_0, \dots, a_n)] < +\infty$.

Or $a_0, \dots, a_n \in A$ donc $[K(a_0, \dots, a_n):K] < +\infty$, $[K(a_0):K] < +\infty$ et $[K(a_0, a_n):K(a_0)] < +\infty$ car a_n algébrique sur K donc sur $K(a_0)$, puis par récurrence en n .

Ainsi, $[K(a_0, \dots, a_n, a):K] = [K(a_0, \dots, a_n, a):K(a_0, \dots, a_n)][K(a_0, \dots, a_n):K] < +\infty$.

D'où $a_0, \dots, a_n$ et a sont algébriques sur K . Ainsi $a \in A$ et A est donc algébriquement clos.